ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А.Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Ученые записки МГУ. Серия: Математика. Москва, 1939. Т. 30. № 3. С. 3-16.
2. *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. Москва: Наука, 1963, 476 С.
3. *Перов А.И.* Неравенства типа Ландау–Адамара для гладких векторных функций // Вестник ВГУ. Серия: Математика и физика. Воронеж, 2010. № 1. С. 159-161.

Ivanova E.V. PROPERTIES OF LOGARITHMIC CONVEXITY OF SEQUENCE L_2-NORMS OF DERIVATIVES PERIODIC FUNCTIONS

Theorem about the relationship of the norms of derivatives vector ω-periodic function in a complex Hilbert space is obtained. The proof uses the Parseval equality with the Fourier series expansion of the function.

Key words: Hilbert space; ω-periodic vector function; absolutely continuous; measurable derivative; Parseval equality.

УДК 519.688

ФАКТОРИЗАЦИЯ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© **Д. С. Ивашов**

Ключевые слова: факторизация многочленов; эксперименты; алгоритм вычисления сомножителей с различными наборами переменных.

Обсуждается схема факторизации многочленов многих переменных реализованная в системе $Mathpar$ [1–4]. Приводятся и обсуждаются результаты экспериментов реализованной схемы факторизации в системе $Mathpar$ с аналогичными алгоритмами реализованными в системах $Mathematica\,7.0$ и $Maple\,15$.

Введение. Доклад посвящен алгоритмам факторизации многочленов многих переменных с целочисленными коэффициентами. Обсуждается новый алгоритм, позволяющий эффективно вычислить сомножители имеющие различные наборы переменных, который мы используем на этапе 1. В результате получим схему факторизации многочленов многих переменных состоящую из трех этапов:

Этап 1. Вычисление сомножителей имеющих различные наборы переменных.

Пусть $F(x_1,\dots,x_n)$ — многочлен многих переменных с целочисленными коэффициентами: $F\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$. Вычислим сомножители с различными наборами переменных многочлена $F(x_1,\dots,x_n)$:

$$F(x_1,\dots,x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_{2^n-1}(x_1,\dots,x_n).$$

Этпа 2. Вычисление кратных сомножителей.

Вычислим кратные сомножители многочленов f_i, где $i=1,\dots,2^n-1$:

$$f_i=\prod_{j=1}^{r_i}h_{ij}^{s_{ij}},$$

где s_{ij} – кратность j-го сомножителя и $s_{ij} \neq s_{ik}$ при $j \neq k$.

Этап 3. Вычисление сомножителей многочленов свободных от квадратов.

Пусть h_{ij} — многочлен свободный от квадратов, а g_{ijk} его неприводимые сомножители:

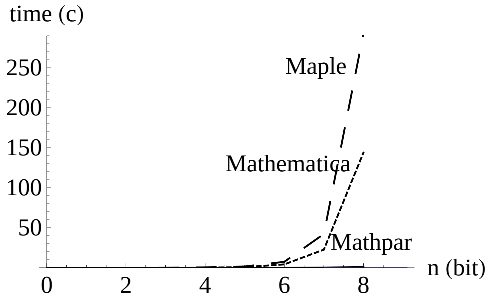
$$h_{ij} = \prod_{k=1}^{r_k} g_{ijk}.$$

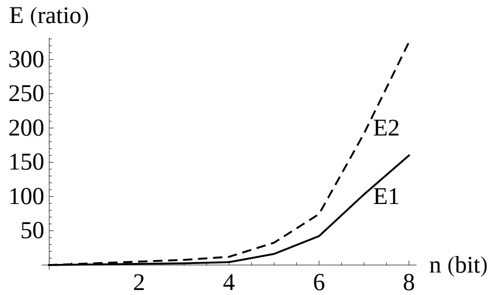
Тогда многочлен $F(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{2^n-1} f_i = \prod_{i=1}^{2^n-1} \prod_{j=1}^{r_i} h_{ij}^{s_{ij}} = \prod_{i=1}^{2^n-1} \prod_{j=1}^{r_i} \prod_{k=1}^{r_k} g_{ijk}^{s_{ij}}.$$

Эксперименты. В первой серии экспериментов использовался многочлен $F(x,y) = f_1(x)f_2(x,y)^{p_1}f_3(x,y)^{p_2}$, где f_i — линейный многочлен с 100-разрядными коэффициентами. Результаты первой серии экспериментов представлены в таблице 1, в которой $2^{n-1} \leqslant p_1, p_2 < 2^n$, E_1 — отношение времени вычисления в системе $Mathematica\,7.0$ к времени вычисления в $Mathpar$, E_2 — отношение времени вычисления в системе $Maple\,15$ к времени вычисления в $Mathpar$.

n	*powers*	*monom*	*Mathpar*	*Mathematica* 7.0	*Maple* 15	E_1	E_2
3	4-8	32	0.02 с	0.05 с	0.15 с	2.5	7.5
4	8-16	64	0.04 с	0.17 с	0.48 с	4.2	12
5	16-32	128	0.05 с	0.82 с	1.63 с	16.4	32.6
6	32-64	256	0.1 с	4.22 с	7.44 с	42.2	74.4
7	64-128	512	0.22 с	22.7 с	42.24 с	103.1	192
8	128-256	1024	0.9 с	144 с	293	160	325

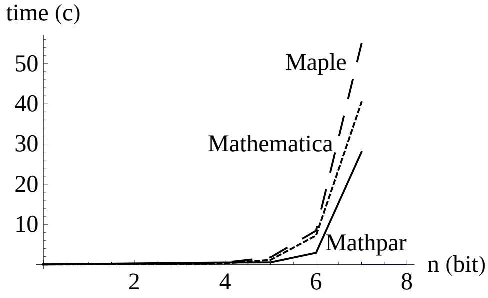


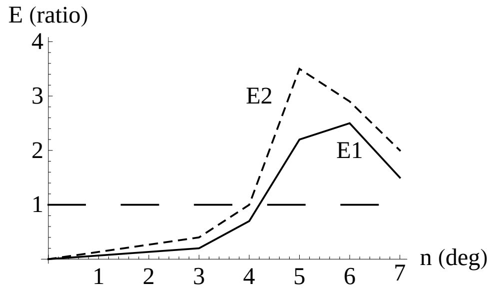


Эксперименты показали, что алгоритмы факторизации реализованные в системе *Math–* – *par* быстрее, чем аналогичные в системе *Mathematica* 7.0 и *Maple* 15. Например, для $n = 3$ *Mathpar* быстрее, чем *Mathematica* и *Maple* в 2.5 и 7.5 раза соответственно, а для $n = 8$ *Mathpar* быстрее в 160 и 325 раз соответственно.

Во второй серии экспериментов использовался многочлен $F(x,y) = f_1(y)^{p_1}(f_2(x,y)f_3(x,y))^{p_2}$, где f_i — линейный многочлен с 100-разрядными коэффициентами. Результаты второй серии экспериментов представлены в таблице 2.

$n(bit)$	*powers*	*monom*	*Mathpar*	*Mathematica* 7.0	*Maple*15	E_1	E_2
3	4-8	68	0.38 с	0.07 с	0.16 с	0.2	0.42
4	8-16	297	0.48 с	0.27 с	0.48 с	0.7	1
5	16-32	845	0.51 с	1.13 с	1.76 с	2.2	3.5
6	32-64	3999	2.9 с	7.2 с	8.4 с	2.5	2.9
7	64-128	13107	28 с	40.4 с	55 с	1.5	2





Эксперименты показали, что алгоритмы факторизации реализованные в системе $Math-$ $-\ par$ в ряде случаев быстрее, чем аналогичные в системе $Mathematica\,7.0$ и $Maple\,15$. Например, для $n=3$ $Mathpar$ медленнее, чем $Mathematica$ и $Maple$ в 5.4 и 2.4 раза соответственно, а для $n=6$ $Mathpar$ быстрее в 2.5 и 2.9 раз соответственно.

Мы не рассматриваем всевозможные типы многочленов. Тем не менее, мы представляем такие эксперименты, которые демонстрируют важность нового первого этапа, который позволяет значительно улучшить алгоритм факторизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivashov D.S.* An algorithm of factorization multivariate polynomials // Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2012. V. 17. Issue 2. P. 591-597.

2. *Ivashov D.S.* Factorization of polynomials of several variables // Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2011. V. 16. Issue 1. P. 133-137.

3. *Ivashov D.S.* Square-free factorization polynomials of many variables // Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2013. V. 18. Issue 4. P. 1207-1215.

4. *Malaschonok G.I., Ivashov D.S.* An algorithm of factorization of polynomials of several variables // Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2010. V. 15. Issue 1. P. 331-334.

Ivashov D.S. FACTORIZATION MULTIVARIATE POLYNOMIALS WITH INTEGER COEFFICIENTS

The scheme for multivariate polynomials factorization with integer coefficients are considered. The experiment results of realized scheme of factorization in *Mathpar* system with the same algorithms realized in systems *Mathematica* 7.0 and *Maple* 15 are given and discussed.

Key words: factorization of polynomials, experiments, algorithm distinct-set-variables factorization.

УДК 517.5

О ТРАЕКТОРИЯХ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА ДЛЯ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

© **А. Иоффе, Д. Друзвятский, А. Льюис**

Ключевые слова: метрическая регулярность; траектории почти максимального наклона.
Рассматривается подход к построению траекторий почти максимального наклона, который базируется на теории метрической регулярности.